

С.И. Сафронова

Математика
(элементы линейной алгебры
и аналитической геометрии)

Практикум по математике для студентов
специальности 09.02.05 Прикладная информатика (по отраслям)
и преподавателей профессиональных образовательных учреждений

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
«КАМЕНСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

С.И. Сафронова

Математика

**(элементы линейной алгебры
и аналитической геометрии)**

Практикум по математике для студентов
специальности 09.02.05 Прикладная информатика (по отраслям)
и преподавателей профессиональных образовательных учреждений

Каменск-Шахтинский
2016

ББК 22.1
УДК 51
С 21

Сафронова С.И. Математика (элементы линейной алгебры и аналитической геометрии): Практикум для студентов специальности 09.02.05 Прикладная информатика и преподавателей профессиональных образовательных учреждений. – Ростов н/Д, 2016. – 53 с.

Пособие составлено в соответствии с требованиями ФГОС и включает в себя основные теоретические сведения по таким разделам высшей математики как линейная алгебра и аналитическая геометрия, примеры решения практических задач по данным разделам и упражнения для аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы студентов.

Материалы работы могут быть использованы в качестве учебного пособия при проведении практических занятий, для организации самостоятельной работы студентов, а также для рубежного контроля по предмету.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Предисловие.....	4
1. Матрицы, определители, системы линейных уравнений.....	5
1.1. Матрицы, действия над матрицами.....	5
1.2. Определители второго и третьего порядков.....	10
1.3. Вычисление определителей высших порядков.....	12
1.3. Системы линейных уравнений	15
Контрольная работа по теме: «Матрицы, определители, системы линейных уравнений».....	23
2. Векторная алгебра	33
2.1. Векторы. Основные понятия.....	33
2.2. Скалярное произведение векторов	34
2.3. Векторное произведение векторов	36
2.4. Смешанное произведение векторов	38
Контрольная работа по теме «Векторы, действия над векторами».....	40
3. Аналитическая геометрия на плоскости.....	41
3.1. Прямая на плоскости	41
3.2. Кривые второго порядка.....	44
Контрольная работа по теме «Прямая на плоскости и кривые второго порядка».....	52
Литература	53

ПРЕДИСЛОВИЕ

Программа подготовки специалистов среднего звена предполагает усиление практической направленности учебных дисциплин и профессиональных модулей, увеличение доли самостоятельной работы студентов. Однако в существующих современных учебниках предлагается небольшое количество практических заданий, что обусловило составление данного практикума.

Каждый раздел пособия состоит из необходимого теоретического минимума, включающего основные определения, теоремы и формулы; примеров решения типовых задач; упражнений для аудиторной и самостоятельной внеаудиторной работы; контрольных работ. Тексты контрольных работ могут использоваться студентами при подготовке к данному виду контроля. В контрольной работе по теме «Матрицы, определители, системы линейных уравнений» представлено достаточное количество вариантов для каждого студента группы. В последнем задании этой работы систему линейных уравнений можно решить тремя способами или каким-то одним по выбору педагога или обучающегося. Варианты для второй и третьей контрольных работ преподаватель может сгруппировать самостоятельно, получив необходимое количество различных вариантов.

Содержание пособия позволяет студенту самостоятельно осваивать основные положения рассматриваемых разделов, но более эффективный результат может быть достигнут при сочетании различных форм аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы.

1. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Матрицы, действия над матрицами

Определение. Матрицей A размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} , где $i=\overline{1, m}$ и $j=\overline{1, n}$, называются *элементами матрицы*. Матрицу A можно обозначить так: $A=(a_{ij})$.

Первый индекс элемента матрицы показывает номер строки, а второй – номер столбца матрицы.

Если число строк и столбцов матрицы равны, то матрицу называют *квадратной*. *Главной диагональю* квадратной матрицы называют диагональ, проведенную с левого верхнего угла матрицы в правый нижний; другую диагональ матрицы называют *побочной*.

Определение. *Единичной матрицей* E называют квадратную матрицу, на главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы равны нулю.

Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Определение. Матрица $B=(b_{ji})$ называется *транспонированной* для матрицы $A=(a_{ij})$, если $a_{ij}=b_{ji}$

Например, дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, матрица $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ – транспонированная для матрицы A .

Определение. *Суммой матриц* A и B одинаковой размерности называется матрица C такой же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B ($c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$).

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$,

тогда $A+B = \begin{pmatrix} 2+5 & -3+8 & 5+1 \\ 0+3 & 3+(-6) & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

Определение. *Произведением матрицы* A *на число* α называют матрицу B , полученную из матрицы A умножением каждого ее элемента на число α .

Задание для самостоятельной работы: докажите, что для матриц одинаковой размерности справедливы свойства:

1. $A+B=B+A$, 2. $A+(B+C)=(A+B)+C$,
2. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$, 4. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

Определение. Произведением матриц A размерности $m \times n$ на матрицу B размерности $n \times k$ называется матрица C размерности $m \times k$, элементы c_{ij} которой равны сумме произведений соответственных элементов i -ой строки матрицы A и j -го столбца матрицы B .

Например, $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, найдем элементы матрицы $C = A \times B$:

$$c_{11} = 4 \cdot 5 + 0 \cdot 3 = 20, c_{12} = 4 \cdot 8 + 0 \cdot (-6) = 32, c_{13} = 4 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 4,$$

$$c_{21} = 6 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 39, c_{22} = 6 \cdot 8 + 3 \cdot (-6) = 30, c_{23} = 6 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 18.$$

$$\text{Следовательно, } C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 32 & 4 \\ 39 & 30 & 18 \end{pmatrix}.$$

Задание для самостоятельной работы: докажите, что

1. $A \cdot E = E \cdot A$,
2. $A \cdot B \neq B \cdot A$,
3. $^*(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Определение. Матрица A^{-1} называется *обратной* для матрицы A , если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Для нахождения обратной матрицы запишем матрицу A справа от нее единичную матрицу E , выполним со строками обеих матриц преобразования (к одной строке прибавим или вычтем другую строку, умноженную на одно и тоже число) так, чтобы слева получилась единичная матрица. Тогда справа будет матрица обратная для матрицы A .

Например, найдем обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

разделим каждый элемент первой строки на 4;

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

вычтем из третьей строки первую, умноженную на 3;

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & -0,75 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

умножим третью строку на 4;

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \end{array} \right) \sim$$

вычтем из первой строки третью, умноженную на 1,25;

прибавим ко второй строке третью, умноженную на 6;

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

справа получили обратную матрицу.

Проверим, что матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ является обратной для

матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + 0 \cdot (-18) + 5 \cdot (-3) & 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 4 \cdot (-5) + 0 \cdot 24 + 5 \cdot 4 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-18) + (-6) \cdot (-3) & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-6) \cdot 0 & 0 \cdot (-5) + 1 \cdot 24 + (-6) \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 + 0 \cdot (-18) + 4 \cdot (-3) & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot (-5) + 0 \cdot 24 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Проверьте самостоятельно, что $A^{-1} \cdot A = E$.

Упражнения

1. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

- определите размерность каждой матрицы;
- для матриц A , B и C найдите транспонированные;
- какие из заданных матриц можно сложить, найдите их сумму;
- найдите $7B$, $-3C$;
- найдите $2A - D$, $4D + E$, $5A + 2D - 9E$;
- произведение каких матриц можно найти, вычислите их;
- есть ли среди данных матриц обратные?

2. Найдите линейные комбинации заданных матриц:

а) $4A - 5B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$,

б) $3A + 4B$, $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 4 \\ 8 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Найдите произведение матриц AB и BA (если они существуют):

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, B = (3 \quad 1 \quad -1 \quad 5 \quad 2),$$

$$\text{д) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{е) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Матрица A имеет размерность 3×3 , какой размерности должна быть матрица B , чтобы их произведением являлась матрица размерности 3×1 ? Составьте матрицы A и B , удовлетворяющие заданным условиям, найдите их произведение.

5. Составьте матрицы A и B , произведением которых будет матрица размерности 2×4 , найдите это произведение.

6. Найдите произведение матриц $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } A = (1 \quad -2 \quad 3 \quad -4),$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Всегда ли существуют произведения $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$?

7. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x) = ax^2 + bx + c$,

$$\text{а) } a=2, b=-3, c=1, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } a=3, b=2, c=-5, A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } a=4, b=-2, c=3, A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } a=1, b=0, c=2, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } a=3, b=-4, c=3, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{е) } a=-2, b=1, c=-7, A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 9 & 2 & 4 \\ 5 & -8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Можно ли найти значение данной функции от матрицы, не являющейся квадратной?

$$8. \text{ Найдите } A^3, \text{ если а) } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$\text{а) } f(x) = 3x^3 + x^2 + 2, A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{в) } f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

10. Найдите обратную матрицу A^{-1} для матрицы A

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1.2. Определители второго и третьего порядков

Определение. Определителем второго порядка матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется разность произведений элементов главной и побочной диагоналей.

Определитель матрицы можно обозначать так: $|A|$ или Δ .

Из определения следует, что $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Например, $\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 32 - 15 = 17$.

Определение. Определителем третьего порядка матрицы

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется значение выражения:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Формулу для вычисления определителя третьего порядка можно представить схематически:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 0 + 0 \cdot (-6) \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot 0 \cdot 0$

$$-1 \cdot (-6) \cdot 1 = 0 + 0 + 12 + 40 - 0 + 6 = 58.$$

Упражнения

1. Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix},$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix},$

в) $\begin{vmatrix} 2x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix},$

г) $\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix},$

д) $\begin{vmatrix} tg \alpha & 1 \\ -1 & tg \alpha \end{vmatrix},$

е) $\begin{vmatrix} 1 & ctg \alpha \\ -ctg \alpha & 1 \end{vmatrix},$

ж) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$

з) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix},$

и) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$

2. Решите уравнение:

$$а) \begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$б) \begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$в) \begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$г) \begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ -y-3 & x-2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$д) \begin{vmatrix} x & ctg \alpha \\ tg \alpha & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$е) \begin{vmatrix} sin 2x & sin x \\ cos x & cos 2x \end{vmatrix} = 0,$$

$$ж) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$з) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$и) \begin{vmatrix} 6 & 3 & x-1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 4 & x+2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Решите неравенство:

$$а) \begin{vmatrix} 2x-3 & 4 \\ x & 3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$б) \begin{vmatrix} x+3 & x+1 \\ x-1 & x-2 \end{vmatrix} < 0,$$

$$в) \begin{vmatrix} 3-x & x+2 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} \geq 6,$$

$$г) \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \leq 0,$$

$$д) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+3 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} > 4,$$

$$е) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ x+2 & 0 & 1 \\ -2 & 3-x & 1 \end{vmatrix} < 0.$$

4. Докажите, что $|A| = |A^T|$.

5. Верно ли, что $|A+B| = |A| + |B|$?

6. Верно ли, что $|A| = |A^{-1}|$?

7. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ проверьте равенство

$$|A \cdot B| = |B \cdot A| = |A| \cdot |B|.$$

8.* Для каких матриц A и B справедливо равенство

$$|A \cdot B| = |B \cdot A| = |A| \cdot |B|, \text{ обоснуйте свой ответ.}$$

1.3. Вычисление определителей высших порядков

Для вычисления определителей высших порядков удобно использовать свойства определителя и разложение определителя по строке (или столбцу).

Свойства определителя

1. При перестановке двух строк (столбцов) определителя знак определителя изменится на противоположный.
2. Если две строки (столбца) определителя равны или пропорциональны, то определитель равен нулю.
3. Если все элементы одной строки (столбца) умножить на число k , то определитель увеличится в k раз.
4. Если к элементам одной строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и тоже число, то значение определителя не изменится.

Определение. Минором элемента a_{ij} матрицы A называют, определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием i –ой строки и j –го столбца.

Минор элемента a_{ij} обозначают: M_{ij} .

Определение. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A называют произведение: $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Из определения следует, что алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} : $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Теорема. Определитель матрицы равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) матрицы на их алгебраические дополнения.

Например,

1) вычислим определитель, используя разложение по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot 4 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 5(8-28) - 8(8-28) = -100 + 160 = 60;$$

2) вычислим этот же определитель, используя сначала свойства, а затем разложение по четвертой строке:

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2^r - 4C_3^r} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 8 & -17 & 5 & 4 \\ 7 & -14 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 8 & -17 & 4 \\ 7 & -14 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-3) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -3(8-28) = 60.$$

С помощью алгебраических дополнений можно вычислять обратные матрицы. Для этого: 1) находим определитель матрицы Δ , если $\Delta \neq 0$, то обратная матрица существует; 2) находим алгебраические дополнения каждого элемента матрицы и составляем обратную матрицу как транспонированную матрицу из алгебраических дополнений, деленных на Δ .

Например, найдем матрицу A^{-1} , обратную для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 - 2C_1 \\ C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 12 = 8,$$

$$2) A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3, A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 2) = 4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5, A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(1 - 6) = 5,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4, A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 + 1) = -3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1, A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 6) = 4,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1.$$

$$3) \text{ Следовательно, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{4}{8} & -\frac{4}{8} & \frac{4}{8} \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Упражнения

1. Определители каких из данных матриц равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}?$$

2. Укажите верные равенства:

$$\text{а) } 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 2 & 10 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{в) } 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 2 & 10 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{г) } 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\text{д) } 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{е) } 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Вычислите определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix},$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix},$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 9 & 8 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

4. Найдите обратную матрицу A^{-1} для матрицы A :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.3. Системы линейных уравнений

Определение. Системой m уравнений с n неизвестными называется

[illegible]

Определение. Решением системы называют набор чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, подстановка которых вместо $x_1, x_2, \dots, x_n$ соответственно обращает каждое уравнение системы в истинное числовое равенство.

Определение. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*; система, не имеющая решений – *несовместной*.

Определение. Система, имеющая единственное решение, называется *определенной*; система, имеющая более одного решения – *неопределенной*.

Рассмотрим основные методы решения систем линейных уравнений.

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений заключается в последовательном исключении неизвестных.

При применении метода Гаусса могут использоваться следующие элементарные тождественные преобразования:

1. Перемена местами двух уравнений системы.
2. Умножение обеих частей уравнения на число, не равное нулю.
3. Замена любого уравнения системы суммой этого уравнения и любого другого, умноженного на произвольное число.
4. Удаление из системы уравнений вида: $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$.

Данные преобразования проще выполнять над матрицей, составленной из коэффициентов при неизвестных и свободных членах, которая называется расширенной матрицей системы. Матрицу преобразуют в равносильную матрицу ступенчатого вида, где все элементы матрицы, стоящие ниже главной диагонали – нули.

Так, для системы (1) расширенная матрица имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Элементарным преобразованиям системы соответствуют аналогичные элементарные преобразования строк матрицы. При этом возможны следующие случаи:

1) $m=n$. Если с помощью элементарных преобразований расширенная матрица системы приведена к треугольному виду:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} & \big| & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & \big| & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3n} & \big| & b'_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \big| & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{mn} & \big| & b'_m \end{pmatrix},$$

т.е. ниже главной диагонали – нули, а все элементы главной диагонали нулю не равны, то система имеет единственное решение. Полученная матрица

соответствует системе:
$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases},$$

в которой последнее уравнение содержит одно неизвестное.

Из такой преобразованной системы все неизвестные определяются без труда «обратным ходом».

2) Если в ступенчатом виде расширенной матрицы присутствует хотя бы одна строка вида: $(0 \ 0 \ 0 \dots 0 \mid b'_k)$ где $b'_k \neq 0$, т.е.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_k \end{array} \right),$$

то система несовместна. Такой строке соответствует уравнение вида:

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b'_k, \text{ которое не имеет решений.}$$

3) Если в ступенчатом виде расширенной матрицы последняя строка, кроме диагонального элемента $a'_{kk} \neq 0$, имеет ещё ненулевые элементы, т.е.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & \dots & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & \dots & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & \dots & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{kk} & a'_{kk+1} & \dots & a'_{kn} & b'_k \end{array} \right),$$

то система имеет бесконечное множество решений, т.е. является неопределённой. В этом случае $n - k$ неизвестных объявляются свободными, т.е. принимающими произвольные значения, а остальные k неизвестных выражаются из уравнений системы через них.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Например, решим систему уравнений: а)

Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12 \end{array} \right) \sim \\
& \quad \begin{array}{l} C_2 - 2C_1 \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - 3C_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} C_4 : (-4) \\ C_2 \leftrightarrow C_4 \end{array} \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \\
& \quad \begin{array}{l} C_3 + C_2 \\ C_4 + 3C_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Следовательно, данная система уравнений имеет единственное решение. Для его нахождения выпишем по полученной матрице соответствующие уравнения: $3x_4=12 \Rightarrow x_4=4$. Подставляя это значение в предыдущее уравнение: $-x_3+2x_4=5$, найдём $x_3=2x_4-5$, $x_3=8-5=3$. Из второго уравнения $x_2-x_3+x_4=3$ определяем $x_2=3+x_3-x_4$, $x_2=3+3-4=2$. А из первого уравнения $x_1+x_2-x_3+x_4=4$ находим $x_1=4-x_2+x_3-x_4$, $x_1=4-2+3-4=1$.

Таким образом, система уравнений имеет единственное решение (1; 2; 3; 4).

$$6) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и с помощью шагов метода Гаусса приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 3 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -10 \\ 0 & -1 & -5 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \end{array} \right) \\
& \quad \begin{array}{l} C_2 - 3C_1 \\ C_3 - 4C_1 \end{array}
\end{aligned}$$

Получена ступенчатая матрица, для которой запишем соответствующую систему уравнений: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$.

Так как эта система после исключения неизвестных приведена к ступенчатому виду, в котором число неизвестных $n=3$ больше числа уравнений $k=2$ (из которых их надо определить), то система неопределённая, то есть имеет бесчисленное множество решений.

Для его нахождения определяем число свободных неизвестных: $l=n-k=3-2=1$. Следовательно, одно из неизвестных можно считать свободным, т.е. принимающим произвольные значения. В качестве него лучше выбирать то неизвестное, которое входит сразу во все уравнения получившейся системы. Таковыми в данном примере являются x_2, x_3 . Выберем в качестве свободного неизвестного x_3 ($x_3 \in R$). Тогда из второго уравнения выражаем x_2 через x_3 : $x_2=10-5x_3$. Подставляя x_2 в первое уравнение, найдём зависимость x_1 от x_3 : $x_1=4+x_2-2x_3$ или $x_1=4+(10-5x_3)-2x_3 \Rightarrow x_1=14-7x_3$.

Таким образом, система имеет бесконечное множество решений:

$$x_1 = 14 - 7x_3; \quad x_2 = 10 - 5x_3; \quad x_3 \in R$$

$$в) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 11x_4 = 0 \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 & | & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -11 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 - C_1]{C_2 - 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & | & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как последней строке полученной матрицы соответствует уравнение $0 = -1$, то система несовместна.

Метод Крамера заключается в решении системы линейных уравнений с помощью определителей:

Δ – определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Если заменить по очереди столбцы из коэффициентов при неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ в определителе Δ столбцом свободных членов системы, то получатся следующие определители:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Если определитель Δ системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

Например, решим систему уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$$

Найдём определитель Δ путём разложения его по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$4 - 2 - 2 \cdot (4 - 3) + 3 \cdot (4 - 6) = -6 \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение.

Вычислим определители, заменяя по очереди коэффициенты при искомом неизвестном на столбец свободных членов:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 3 \\ 11 & 2 & 1 \\ 14 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 14 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 14 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 11 \cdot (4 - 2) - 2 \cdot (22 - 14) + 3 \cdot (22 - 28) = -12;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 3 & 14 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 14 & 2 \end{vmatrix} + 11 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 3 & 14 \end{vmatrix}$$

$$= 22 - 14 - 11 \cdot (4 - 3) + 3 \cdot (28 - 33) = -18;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 2 & 2 & 11 \\ 3 & 2 & 14 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} + 11 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 28 - 22 - 2 \cdot (28 - 33) + 11 \cdot (4 - 6) = -6$$

Тогда, по формулам Крамера имеем:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-12}{-6} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-18}{-6} = 3; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-6}{-6} = 1.$$

Матричный способ заключается в решении системы с помощью матричного уравнения: $A \cdot X = B$, где A – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, B – матрица – столбец свободных членов, X – искомая матрица. Если определитель матрицы A не равен нулю, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1} .

Умножим обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow EX = A^{-1} \cdot B$$

Так как $A^{-1} \cdot A = E$ (единичная матрица) и $EX = X$, то $X = A^{-1} \cdot B$.

Например, решим систему уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$$

Заменим систему матричным уравнением: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найдем A^{-1} :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{C_2 - C_1}{C_3 - 2C_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -13 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -13 \end{vmatrix} = -13 + 7 = -6 \neq 0,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 5 = 2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 2) = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 30) = 32,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 12 = -13, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(5 - 4) = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 18 = -20, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 6) = 7,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

$$\text{Следовательно, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{6} & -\frac{32}{6} & \frac{20}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{13}{6} & -\frac{7}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{16}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{13}{6} & -\frac{7}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тогда } X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{16}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{13}{6} & -\frac{7}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \cdot 4 - \frac{16}{3} \cdot 5 + \frac{10}{3} \cdot 9 \\ \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{13}{6} \cdot 5 - \frac{7}{6} \cdot 9 \\ \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 - \frac{1}{6} \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

1. Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее решение и одно частное решение:

$$а) \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1, \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 2, \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ 6x_1 + 4x_2 = 7, \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6, \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 = 1, \end{cases}$$

$$е) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5, \end{cases}$$

$$ж) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0, \end{cases}$$

$$з) \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18, \end{cases}$$

$$и) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

$$к) \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 9x_3 = 0, \end{cases}$$

$$л) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \end{cases}$$

$$м) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8. \end{cases}$$

2. Исследовать системы линейных уравнений, зависящих от параметра k . Для совместных систем найти общее и одно частное решение:

$$а) \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 = k, \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2x_1 + kx_2 = 6 \\ kx_1 + 8x_2 = 12, \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 3, \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} (1+k)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+k)x_2 + x_3 = k \\ x_1 + x_2 + (1+k)x_3 = k^2. \end{cases}$$

3. Решить систему линейных уравнений:

$$а) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2, \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16, \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \end{cases}$$

$$\text{д)} \begin{cases} x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 26 \\ -x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 15, \end{cases}$$

$$\text{е)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \end{cases}$$

$$\text{и)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 = 11, \end{cases}$$

$$\text{к)} \begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \end{cases}$$

$$\text{л)} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = -3, \end{cases}$$

$$\text{м)} \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15 \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36, \end{cases}$$

$$\text{н)} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15 \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 21, \end{cases}$$

$$\text{о)} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 22 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\text{п)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 19, \end{cases}$$

$$\text{р)} \begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -15 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = -6 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$$

Контрольная работа по теме: «Матрицы, определители, системы линейных уравнений»

I вариант

1. Найти $2A+3E$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

II вариант

1. Найти $2A+3E$, $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$$

III вариант

1. Найти $2A+3E$, $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$$

IV вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2. \end{cases}$$

V вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

VI вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$$

VII вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$$

VIII вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12. \end{cases}$$

IX вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

X вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -2. \end{cases}$$

XI вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 3 & 1 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -2. \end{cases}$$

XII вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 13. \end{cases}$$

XIII вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 3 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

XIV вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & x \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

XV вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

XVI вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$$

XVII вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

XVIII вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 3 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

XIX вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

XX вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 2 & x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7. \end{cases}$$

XXI вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

XXII вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

XXIII вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

XXIV вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$$

XXV вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

XXVI вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

XXVII вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 2 \end{vmatrix} > 1$.

4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

XXVIII вариант

1. Найти $2A+3E$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Найти $A \times B$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Решить неравенство: $\left| \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 2 \end{vmatrix} \right| > 1$.

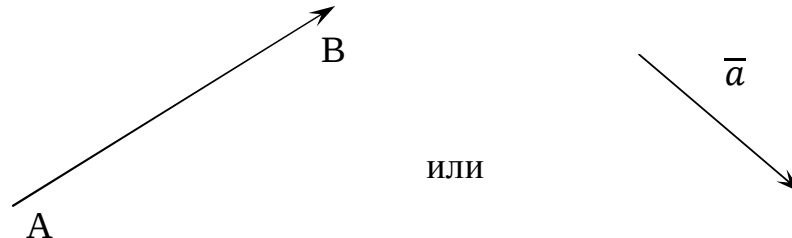
4. Решить систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 8. \end{cases}$$

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Векторы. Основные понятия

Определение. Вектором называется направленный отрезок $\overline{AB}$, в котором точка A рассматривается как начало, а точка B – как конец.

Вектор обозначается $\overline{AB}$ или $\vec{a}$, и изображается следующим образом:



Определение. Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной или на параллельных прямых.

Определение. Векторы называются *компланарными*, если они лежат на одной или на параллельных плоскостях.

Определение. Векторы называются равными, если они коллинеарны, сонаправлены и их длины равны.

Определение. Координатами $\{a_x; a_y; a_z\}$ вектора $\vec{a}$ в системе XOY называются проекции этого вектора на оси Ox, Oy, Oz .

В этом случае пишут: $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$.

Определение. Базисными ортами называются единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленные соответственно по координатным осям Ox, Oy, Oz .

Координаты вектора являются коэффициентами его разложения по ортам: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$.

Если известны координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора $\overline{AB}$ равны разностям соответствующих координат его конца B и начала A , т.е. $\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Длина вектора, заданного своими координатами $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, вычисляется по формуле: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

При сложении (вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (вычитаются), а при умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число.

Например, а) если $A(-2; 3; -5)$, $B(2; -3; 1)$, то координаты вектора $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \{2 - (-2); -3 - 3; 1 - (-5)\} = \{4; -6; 6\} \text{ и его длина:}$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 6^2} = 2\sqrt{22};$$

б) даны векторы: $\vec{a} = \{2; 4; 0\}$, $\vec{b} = \{0; -3; 1\}$ и $\vec{c} = \{5; -1; 2\}$, найдем координаты вектора $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$:

$$\begin{aligned} \overline{d} &= \{2 \cdot 2; 2 \cdot 4; 2 \cdot 0\} - \{3 \cdot 0; 3 \cdot (-3); 3 \cdot 1\} + \{5; -1; 2\} = \{4; 8; 0\} - \{0; -9; 3\} \\ &+ \{5; -1; 2\} = \{4-0+5; 8-(-9)+(-1); 0-3+2\} = \{9; 16; -1\}. \end{aligned}$$

Упражнения

1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и постройте векторы $2\overline{AB}$, $\overline{AB} + \overline{AC}$, $\overline{AB} - 3\overline{AC}$, если $A(1; -2)$, $B(3; 0)$ и $C(2; 3)$.

2. Найдите длину вектора $\overline{a}$:

- а) $\overline{a} = \{5; 12\}$, б) $\overline{a} = \{\sqrt{5}; -2\}$, в) $\overline{a} = \{-3; 0; 4\}$,
 г) $\overline{a} = \{3; 2; -1\}$, д) $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} + 7\overline{k}$, е) $\overline{a} = 3\overline{i} - 4\overline{k}$,
 ж) $\overline{a} = -\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$.

3. Даны векторы $\overline{a} = \{3; 0; -2\}$, $\overline{b} = \{1; 2; -5\}$, $\overline{c} = \{-1; 1; 1\}$, $\overline{d} = \{8; 4; 1\}$.

Найдите координаты и длины векторов: $\overline{m} = -5\overline{a} + \overline{b} - 6\overline{c} + \overline{d}$ и $\overline{l} = 3\overline{a} - \overline{b} - \overline{c} - \overline{d}$.

2.2. Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением $\overline{a} \cdot \overline{b}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| |\overline{b}| \cos \widehat{\overline{a} \overline{b}}$$

Свойства скалярного произведения

$$1. (\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$$

$$2. (\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{c}) + (\overline{b}, \overline{c})$$

$$3. (\lambda \overline{a}, \overline{b}) = \lambda (\overline{a}, \overline{b})$$

4. Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны: $(\overline{a}, \overline{b}) = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$.

5. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$.

6. Скалярное произведение равно произведению длины одного из векторов на проекцию другого на направление первого:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot \text{пр}_{\overline{a}} \overline{b} = |\overline{b}| \cdot \text{пр}_{\overline{b}} \overline{a}.$$

7. Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами: $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, находится по формуле:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Например, а) найдем угол φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если $A(1; 2; -1)$, $B(5; 5; 11)$ и $C(13; 18; 20)$:

1) координаты векторов: $\overline{AB} = \{4; 3; 12\}$ $\overline{AC} = \{12; 16; 21\}$,

2) из определения скалярного произведения получим:

$$\cos(\widehat{\overline{AB} \overline{AC}}) = \frac{(\overline{AB}, \overline{AC})}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}, \quad \cos \varphi = \frac{4 \cdot 12 + 3 \cdot 16 + 12 \cdot 21}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} \cdot \sqrt{12^2 + 16^2 + 21^2}} = \frac{348}{13 \cdot 29} = \frac{12}{13},$$

3) таким образом, угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$: $\varphi = \arccos\left(\frac{12}{13}\right) \approx 23^\circ$;

б) даны векторы $\overline{a} = \{2; -4; 2\}$ и $\overline{c} = \{2; 6; 5\}$, найдем проекцию вектора $\overline{a} + \overline{c}$ на вектор $\overline{b} + \overline{c}$:

1) координаты векторов $\overline{a} + \overline{c}$ и $\overline{b} + \overline{c}$: $\overline{a} + \overline{c} = \{4; 2; 7\}$, $\overline{b} + \overline{c} = \{2; 12; 3\}$,

2) используя свойство 6, получим:

$$\text{пр}_{\overline{b} + \overline{c}} (\overline{a} + \overline{c}) = \frac{(\overline{a} + \overline{c}) \cdot (\overline{b} + \overline{c})}{|\overline{b} + \overline{c}|} = \frac{4 \cdot 2 + 2 \cdot 12 + 7 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 12^2 + 3^2}} = \frac{53}{\sqrt{157}} \approx 4,23.$$

Упражнения

1. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если:

а) $|\overline{a}| = 6$, $|\overline{b}| = 7$, угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен 60° ;

б) $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 1$, угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен 45° ;

в) $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 2$, угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен 90° ;

г) $|\overline{a}| = \sqrt{15}$, $|\overline{b}| = 2\sqrt{2}$, угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен 150° .

2. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если:

а) $\overline{a} = \{1; -1; 1\}$, $\overline{b} = \{5; 1; 1\}$; б) $\overline{a} = \{1; 0; 2\}$, $\overline{b} = \{-2; 1; 1\}$;

в) $\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$; г) $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + 9\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - \overline{j}$.

3. Даны вершины треугольника ABC . Найдите угол $\angle BAC$ этого треугольника:

а) $A(1; 2)$, $B(-3; 4)$, $C(6; 2)$;

б) $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$.

4. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является квадратом, если его вершины $A(-5; 3; 4)$, $B(-1; -7; 5)$, $C(6; -5; -3)$, $D(2; 5; -4)$.

5. В треугольнике ABC вершины имеют координаты $A(1; 1; -1)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3; 2; 1)$. Найдите:

а) длины сторон треугольника;

б) внутренние углы;

в) острый угол между медианой BM и стороной AC .

6. Найдите длину вектора $\overline{AB}$, если $\overline{AB} \perp \overline{a}$, $\overline{a} = \{1; -2; 3\}$, $A(2; 4; 5)$, $B \in O_x$.

7. Даны векторы $\vec{a}=\{4; -1; -2\}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$. Найдите:

а) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

в) проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$;

г) проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

8. Даны векторы $\vec{a}=\{3; -6; -1\}$, $\vec{b}=\{1; 4; -5\}$, $\vec{c}=\{3; -4; 12\}$. Найдите проекцию вектора $\vec{a}+\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

9. Даны векторы $\vec{a}=\{1; -3; 4\}$, $\vec{b}=\{3; -4; 2\}$, $\vec{c}=\{-1; 1; 4\}$. Найдите проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{c}+\vec{b}$.

10. Найдите вектор $\vec{a}$ коллинеарный вектору $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ и удовлетворяющий условию $(\vec{a}, \vec{b})=28$.

11. При каком значении β векторы $\vec{a}=\beta\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\beta\vec{k}$ перпендикулярны?

12. Найдите вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условию $(\vec{c}, \vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$ и перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{2; -3; 1\}$, и $\vec{b}=\{1; -2; 3\}$.

2.3. Векторное произведение векторов

Определение. Векторным произведением $\vec{a} \times \vec{b}$ вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, что:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлен таким образом, что кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ совершающимся против часовой стрелки;

2) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a} \vec{b}}).$$

Свойства векторного произведения

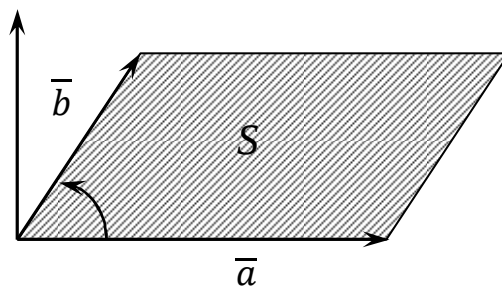
$$1. \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, 2. (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c},$$

$$3. (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}).$$

4. Векторное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

5. Модуль векторного произведения двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$.



6. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами: $\vec{a}=\{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b}=\{b_x; b_y; b_z\}$ может быть вычислено по

формуле:
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Например, найдем площадь треугольника ABC с вершинами $A(2; 2; 2)$, $B(1; 3; 3)$ и $C(3; 4; 2)$. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, т.е. половине модуля векторного произведения этих векторов. Так как $\vec{AB} = \{-1; 1; 1\}$ и $\vec{AC} = \{1; 2; 0\}$, то по формуле для вычисления векторного произведения в

координатной форме имеем:
$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} = \{-2; 1; -3\};$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}. \text{ Следовательно, } S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{14} \text{ (кв.ед.).}$$

Упражнения

1. Даны векторы $\vec{a}=\{3; -1; -2\}$, $\vec{b}=\{1; 2; -1\}$. Найдите векторное произведение векторов:

а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$, б) $2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{b}$; в) $2\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{a} + \vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+7\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

Найдите $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ и $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. При каких значениях α векторы $\alpha\vec{a} + \vec{b}$ и $3\vec{a} + \alpha\vec{b}$ коллинеарны?

4. Даны точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$ и $C(3; 3; 1)$. Найдите координаты векторных произведений:

а) $\vec{AB} \times \vec{BC}$; б) $(\vec{BC} - 2\vec{CA}) \times \vec{CB}$.

5. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если длины этих векторов равны 4 и 3 соответственно и угол между ними $\frac{3\pi}{4}$.

6. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и синус угла между этими векторами:

а) $\vec{a}=\{8; 4; 1\}$, $\vec{b}=\{2; -2; 1\}$; б) $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

7. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и высоту этого треугольника, проведенную к стороне, содержащей вектор $\vec{a}$:

а) $\vec{a}=\{-4; -8; 8\}$, $\vec{b}=\{4; 3; 2\}$; б) $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{j}-7\vec{k}$.

8. В треугольнике вершины имеют координаты $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Найдите:

- а) площадь этого треугольника;
- б) синусы внутренних углов;
- в) все высоты треугольника.

9. Даны векторы $\vec{a}=\{1; -4; 0\}$, $\vec{b}=\{6; 3; -2\}$, $\vec{c}=\{1; -2; 2\}$. Найдите проекцию векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

10. Определите при каких значениях α и β вектор $\alpha\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ будет коллинеарен вектору $\vec{a}\times\vec{b}$, если $\vec{a}=\{3; -1; 1\}$, $\vec{b}=\{1; 2; 0\}$.

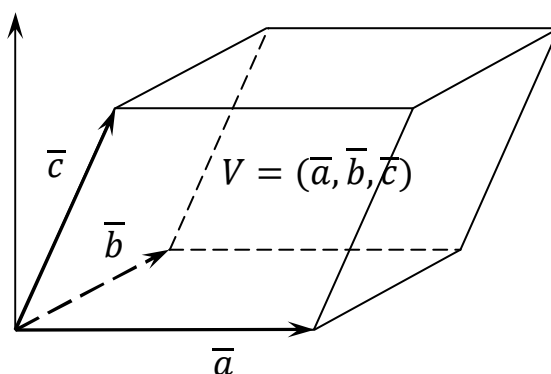
2.4. Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ и вектора $\vec{c}$: $(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{c})$, которое обозначается: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Свойства векторного произведения

1. Три ненулевых вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

2. Если некопланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ приведены к общему началу, то абсолютная величина их смешанного произведения равна объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах как на рёбрах.



3. Смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ векторов, заданных своими координатами:

$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$, равно определителю третьего порядка, составленному из координат векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Например, найдем объём треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(-1; 1; 0)$, $B(2; -2; 1)$, $C(3; 1; -1)$ и $D(1; 0; -2)$:

1) объём пирамиды равен 1/6 объёма параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AD}$;

2) координаты этих векторов:

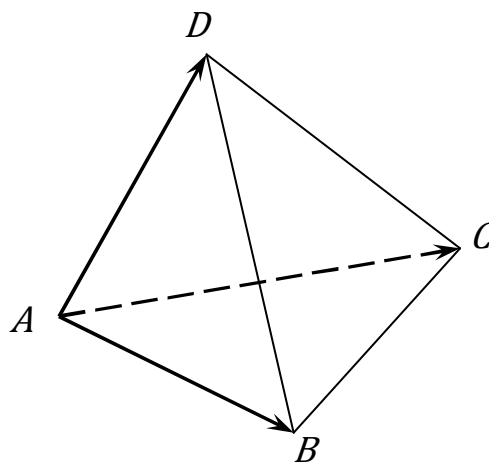
$$\vec{AB}=\{3; -3; 1\},$$

$$\vec{AC}=\{4; 0; -1\}$$

$$\vec{AD}=\{2; -1; -2\};$$

3) смешанное произведение векторов:

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$



$$=-4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \cdot (6+1) + (3+6) = -25.$$

$$4) V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot |-25| = \frac{25}{6} \text{ (куб. ед.)}.$$

Упражнения

1. Найдите смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если:

а) $\vec{a}=\{2; 1; 0\}$, $\vec{b}=\{3; 4; -1\}$, $\vec{c}=\{-1; -3; 1\}$;

б) $\vec{a}=\{3; 5; 1\}$, $\vec{b}=\{4; 0; -1\}$, $\vec{c}=\{2; 1; 1\}$;

в) $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$;

г) $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=7\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{c}=-2\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$.

2. Лежат ли в одной плоскости точки:

а) $A(-1; 3; 1)$, $B(3; -2; 2)$, $C(5; 5; 3)$, $D(2; 1; 0)$;

б) $A(1; -2; 0)$, $B(-1; 7; -1)$, $C(3; 2; -1)$, $D(7; 0; -3)$;

в) $A(5; 7; -2)$, $B(3; 1; -1)$, $C(9; 4; -4)$, $D(1; 5; 0)$?

3. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах:

а) $\vec{a}=\{1; -2; 1\}$, $\vec{b}=\{3; 2; 1\}$, $\vec{c}=\{1; 0; -1\}$;

б) $\vec{a}=\{3; 1; 0\}$, $\vec{b}=\{1; 2; -1\}$, $\vec{c}=\{-2; 3; 1\}$.

4. Найдите высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, опущенную на грань, построенную на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$,

если $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=\{1; 2; 1\}$, $\vec{c}=\{1; -3; 1\}$.

5. Найти объем пирамиды $ABCD$, вершины которой заданы координатами: $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$.

6. Даны вершины пирамиды $A(-5; -4; 8)$, $B(2; 3; 1)$, $C(4; 1; -2)$, $D(6; 3; 7)$. Найдите длину высоты, опущенную на грань: а) BCD ; б) ABC ; в) DAC .

7. Даны вершины пирамиды $A(1; 2; -1)$, $B(5; 0; 1)$, $C(-1; 3; 4)$, $D(2; 2; 1)$. Найдите:

а) объем пирамиды;

б) длину высоты, опущенную на грань ADC ;

в) площадь сечения, проходящего через точки A , D и M , где M – середина ребра BC ;

г) $\sin \angle BAC$, $\cos \angle ADC$;

д) проекцию вектора $\vec{AD}$ на вектор $\vec{AC}$.

8. Объем тетраэдра равен 5, а его вершины находятся в точках $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Найдите координаты четвертой вершины D , если известно, что она лежит на оси ординат.

Контрольная работа по теме «Векторы, действия над векторами»

№1. Найти: а) длину вектора $\overline{AB}$, б) координаты вектора $2\overline{AB}-\overline{AC}$

1. $A(-3; 5; 1), B(-3; 5; 1), C(0; 5; 2);$
2. $A(6; 4; 3), B(-1; 3; 5), C(-1; 4; -7);$
3. $A(2; 1; 3), B(2; -3; 7), C(4; -2; 9);$
4. $A(-1; 2; 5), B(-1; -2; 3), C(1; 6; -1);$
5. $A(3; 1; 4), B(-2; 4; 6), C(-4; 8; -4);$
6. $A(-1; 2; -3), B(-1; 4; 2), C(3; 2; 1);$
7. $A(2; -1; 4), B(-2; 3; 4), C(-1; 3; -2);$
8. $A(3; 2; -1), B(-1; 0; 5), C(2; -1; -3);$
9. $A(-5; 0; 4), B(4; -1; 6), C(-3; 1; -4);$
10. $A(-1; 3; 2), B(5; -5; 3), C(5; -1; 4).$

№2. Найдите косинус угла N и площадь треугольника MNP.

1. $M(3; -3; 1), N(2; -1; 3), P(-4; 1; -3);$
2. $M(2; 2; -4), N(-2; 1; 5), P(2; -1; 5);$
3. $M(3; -2; 4), N(-1; 0; 4), P(-1; 3; -2);$
4. $M(0; -1; 5), N(1; -3; 2), P(4; -3; 0);$
5. $M(4; -2; 4), N(2; -1; 3), P(5; -1; 4);$
6. $M(-1; 5; -2), N(0; -4; 1), P(-3; 5; 6);$
7. $M(-4; 3; 5), N(5; -2; 3), P(2; -1; 4);$
8. $M(-4; 0; 6), N(-1; 4; -2), P(3; -2; -5);$
9. $M(1; -2; 5), N(-3; 2; -4), P(-1; 4; -2);$
10. $M(-5; 3; 1), N(-2; 4; 0), P(3; 1; -3).$

№3. Найдите её объём пирамиды ABCD.

1. $A(-5; -4; 8), B(2; 3; 1), C(4; 1; -2) D(6; 3; 7);$
2. $A(1; -1; 3), B(6; 1; -6), C(1; 4; -3) D(5; -6; 3);$
3. $A(6; 1; 5), B(1; -1; 6), C(4; 5; -2) D(-1; 3; 0);$
4. $A(-1; 3; 0), B(6; 1; 5), C(1; -1; 6) D(4; 6; -2);$
5. $A(4; 5; -2), B(-1; 3; 0), C(6; 1; 5) D(1; -1; 6);$
6. $A(1; -1; 6), B(4; 5; -2), C(-1; 3; 0) D(6; 1; 5);$
7. $A(2; 2; 5), B(3; 1; -1), C(1; -2; 1) D(-2; 1; 0);$
8. $A(-2; 1; 0), B(2; 2; 5), C(3; 1; -2) D(2; 1; -3);$
9. $A(1; -2; 1), B(-2; -1; 0), C(2; 2; 5) D(3; -1; 2);$
10. $A(3; 1; -2), B(1; -2; 0), C(-2; 1; 0) D(6; -1; 4).$

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

3.1. Прямая на плоскости

Различные виды уравнения прямой:

- *Общее уравнение прямой:* $Ax + By + Cz = 0$;
- *уравнение прямой с угловым коэффициентом:* $y = kx + b$ (k – тангенс угла φ наклона этой прямой к оси Ox , т.е. $k = \operatorname{tg} \varphi$);
- *уравнение пучка прямых, проходящих через точку $(x_0; y_0)$:*
 $y - y_0 = k(x - x_0)$;
- *уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Угол между прямыми: если прямые заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то тангенс угла между ними равен:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Условие параллельности двух прямых состоит в равенстве их угловых коэффициентов: $k_1 = k_2$, условие перпендикулярности двух прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Если прямые заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z = 0$, то тангенс угла между ними вычисляется по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|,$$

тогда, условие параллельности прямых: $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$ или $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, условие их перпендикулярности: $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Расстояние d от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + Cz = 0$ вычисляется по формуле:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

Например, даны вершины треугольника: $A(-2; 9)$, $B(7; -3)$, $C(13; 14)$, найдем: уравнение стороны AB и угловой коэффициент прямой AB ; уравнение медианы AM ; уравнение высоты CH ; уравнение прямой l , проходящей через вершину C параллельно стороне AB .

1) Для составления уравнения стороны AB воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки A и B :

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A};$$

получаем,

$$\frac{x+2}{7+2} = \frac{y-9}{-3-9};$$

$$\frac{x+2}{9} = \frac{y-9}{-12};$$

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-9}{-4};$$

$$-4(x+2)=3(y-9);$$

$$-4x-8=3y-27;$$

$$\text{или } 4x+3y-19=0 \text{ (AB).}$$

Чтобы найти угловой коэффициент прямой AB , решим полученное уравнение относительно y : $3y=-4x+19$; $y=-\frac{4}{3}x+\frac{19}{3}$, следовательно, $k_{AB}=-\frac{4}{3}$.

2) Для составления уравнения медианы AM найдём координаты точки M , как середины стороны BC : $x_M = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{7+13}{2} = 10$; $y_M = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{-3+14}{2} = 5,5$ $\Rightarrow M(10; 5,5)$. Зная координаты двух точек $A(-2; 9)$ и $M(10; 5,5)$, лежащих на медиане (AM), получим её уравнение:

$$\frac{x+2}{10+2} = \frac{y-9}{5,5-9}$$

$$\frac{x+2}{12} = \frac{y-9}{-3,5}$$

$$\frac{x+2}{24} = \frac{y-9}{-7}$$

$$-7(x+2)=24(y-9);$$

$$-7x-14=24y-216;$$

$$7x+24y-202=0 \text{ (AM).}$$

3) Для того, чтобы найти уравнение высоты CH , воспользуемся уравнением пучка прямых. Так как $CH \perp AB$, то из условия перпендикулярности имеем: $k_{CH} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$. Тогда, $y-14 = \frac{3}{4}(x-13)$ или $4(y-14)=3(x-13)$, $4y-56=3x-39$ или $3x-4y+17=0$ (CH).

4) Для составления уравнения прямой l , проходящей через вершину C параллельно стороне AB воспользуемся также уравнением пучка прямых. Так как $l \parallel AB$, то $k_l = k_{AB} = -\frac{4}{3}$.

$$\text{Тогда, } y-14 = -\frac{4}{3}(x-13); 3(y-14) = -4(x-13) \text{ или } 4x+3y-94=0 \text{ (l).}$$

Упражнения

1. Найдите угол между прямыми:

а) $y=2x-3$ и $y=0,5x+5$;

б) $y=-5x+1$ и $y=5x-2$;

в) $y=x-3$ и $y=2-x$;

г) $2x+3y+10=0$ и $5x-y+4=0$;

д) $3x+2y-1=0$ и $5x-y-4=0$;

е) $y=\frac{3}{4}x-2$ и $8x+6y+5=0$,

ж) $y=x+3$ и $x=2$;

з) $x+4y+10=0$ и $5y-3=0$.

2. Определите взаимное расположение следующих пар прямых:

а) $3x+5y-9=0$ и $10x-6y+4=0$;

б) $x+y=0$ и $5x+5y-8=0$,

в) $x+9=0$ и $2x-3=0$;

г) $y=3-6x$ и $12x+2y-5=0$;

д) $2y=x-1$ и $4y-2x+2=0$;

е) $y=3x-1$ и $x+3y-2=0$.

3. При каких значениях k следующие пары прямых параллельны, а при каких перпендикулярны?

а) $2x-3y+4=0$ и $kx-6y+7=0$;

б) $kx-4y+1=0$ и $-2x+y+2=0$;

в) $4x+y-6=0$ и $3x+ky-2=0$;

г) $x-ky+5=0$ и $2x+3y+3=0$

4. Найдите уравнение прямой, пересекающей ось Oy в точке $B(0; 5)$ и составляющей с осью Ox угол 45° . В какой точке эта прямая пересекает ось Ox ?

5. Даны вершины треугольника $A(-3; 2)$, $B(5; -2)$, $C(0; 4)$. Составьте уравнения прямых, содержащих стороны и медианы данного треугольника.

6. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2; 3)$ и точку пересечения прямых $2x+3y-8=0$ и $x-4y+5=0$.

7. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-2y+5=0$ и $x+2y-9=0$, параллельно прямой $2x+y+6=0$.

8. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1; 2)$:

а) параллельно прямой $y=2x-7$;

б) перпендикулярно прямой $x+3y-2=0$.

9. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -3)$:

а) параллельно прямой BC , если $B(-4; 0)$ и $C(2; 2)$;

б) перпендикулярно прямой $x-y=0$.

10. Составьте:

- а) уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника: $A(5;-4)$, $B(-1;3)$, $C(-3;-2)$, параллельно противоположным сторонам;
б) уравнения высот этого треугольника.

11. Даны уравнения оснований трапеции: $3x-4y-15=0$ и $3x-4y-35=0$. Найдите длину ее высоты.

12. Точка $A(2;-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y-7=0$. Вычислите площадь этого квадрата.

13. Точка $A(5;-1)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $4x-3y-7=0$. Составьте уравнения прямых, на которых лежат остальные стороны этого квадрата.

14. Даны уравнения стороны ромба $x+3y-8=0$ и его диагонали $2x+y+4=0$. Составьте уравнения остальных сторон ромба, если точка $(-9;-1)$ лежит на стороне ромба, параллельной заданной.

3.2. Кривые второго порядка

Определение. Кривой второго порядка называется линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих декартовых координат x и y :

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \quad (1),$$

где A, B, C, D, E, F – действительные числа, при этом A, B, C не равны нулю одновременно. Уравнение (1) называется *общим уравнением* кривой второго порядка.

В зависимости от коэффициентов уравнение (1) может определять одну из кривых на плоскости: окружность, эллипс, гиперболу, параболу.

3.2.1. Окружность

Определение. Окружность – это множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки (центра).

Если R – радиус окружности, а точка $O(x_0; y_0)$ – её центр, то каноническое уравнение окружности имеет вид:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2.$$

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то ее уравнение имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

Если в уравнении (1) $C=0$ и $A=B$, то получим *общим уравнением окружности*: $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Например, построим кривую $9x^2 + 9y^2 - 72x + 18y + 117 = 0$.

Так как в данном уравнении коэффициенты при квадратах переменных равны между собой и отсутствует произведение $x \cdot y$, то это уравнение определяет окружность. Приведём данное уравнение к каноническому виду.

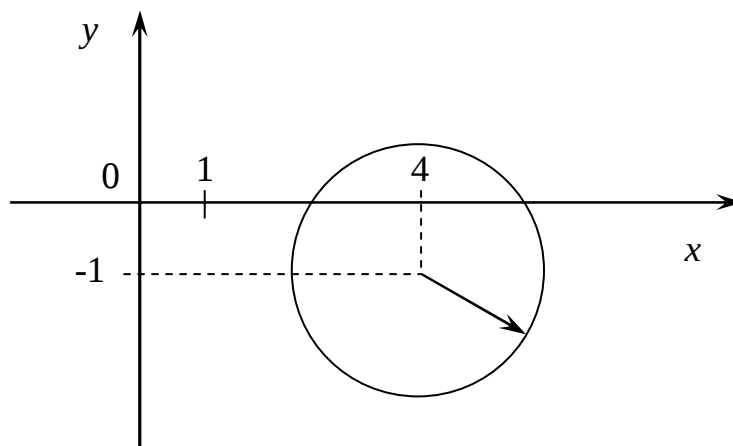
Для этого разделим обе его части на 9 и сгруппируем члены, содержащие x и y : $(x^2 - 8x) + (y^2 + 2y) + 13 = 0$.

Дополним выражения в скобках до полного квадрата:

$$(x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2) - 4^2 + (y^2 + 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2) - 1^2 + 13 = 0$$

или $(x-4)^2 + (y+1)^2 - 4 = 0$, откуда $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 4$.

Следовательно, координаты центра: $x_0 = 4$, $y_0 = -1$ и радиус окружности: $R=2$.



Строим окружность.

Упражнения

1. Составьте уравнение окружности, если:

- а) центр окружности совпадает с началом координат и радиус равен 3;
- б) окружность проходит через начало координат и ее центр находится в точке $O(6; -8)$;
- в) окружность проходит через точку $A(2; 6)$ и ее центр находится в точке $O(-1; 2)$;
- г) центр окружности совпадает с началом координат и прямая $3x - 4y + 20 = 0$ является касательной к окружности;
- д) центр окружности совпадает с точкой $O(1; -1)$ и прямая $5x - 12y + 9 = 0$ является касательной к окружности;
- е) точки $A(3; 2)$ и $B(-1; 6)$ являются концами одного из диаметров окружности;
- ж) окружность проходит через точки $A(3; 1)$ и $B(-1; 3)$ и ее центр лежит на прямой $3x - y - 2 = 0$;
- з) окружность проходит через три точки $A(1; 1)$, $B(1; -1)$ и $C(2; 0)$;
- и) окружность проходит через три точки $A(-1; 5)$, $B(-2; -2)$ и $C(5; 5)$.

2. Выберите уравнения, определяющие окружность, найдите координаты центра и радиус окружности:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| а) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$; | б) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$; |
| в) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$; | г) $x^2 + y^2 + x = 0$; |
| д) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$; | д) $x^2 + y^2 + 4y = 0$. |

3.2.2. Эллипс

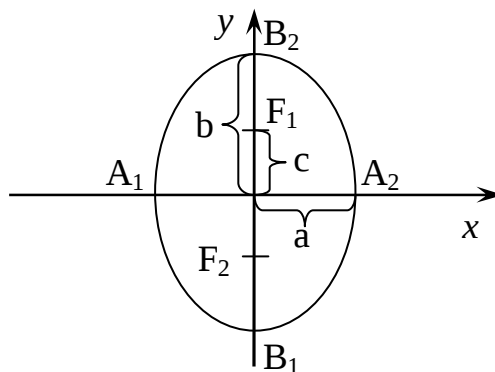
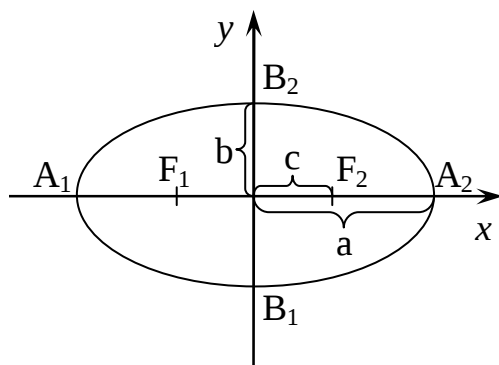
Определение. Эллипс – это множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная и равная $2a$.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ называется каноническим уравнением эллипса, где $(x; y)$ – координаты текущей точки; a – большая полуось, b – малая полуось.

Точки $A_1(-a; 0)$ и $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$ и $B_2(0; b)$ – точки пересечения эллипса с его осями симметрии (координатными осями), называются вершинами эллипса. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 , длины которых соответственно равны $2a$ и $2b$, называются соответственно большой и малой осями эллипса. Расстояние между фокусами F_1 и F_2 обозначается $2c$.

Если в уравнении эллипса $a > b$, то $c^2 = a^2 - b^2$, а фокусы имеют координаты: $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$.

Если $a < b$, то $c^2 = b^2 - a^2$, $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$.



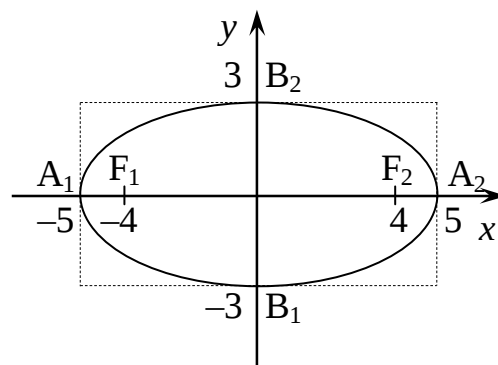
Например, построим эллипс $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$.

Приведём данное уравнение к каноническому виду (свободный член уравнения перенесём вправо и затем разделим на него обе части уравнения):

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Следовательно, $a=5$ – большая полуось, $b=3$ – малая полуось. Координаты вершин эллипса: $A_1(-5; 0)$, $A_2(5; 0)$, $B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$.

Так как $a > b$, то $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$ и фокусы имеют координаты $F_1(-4; 0)$ и $F_2(4; 0)$.



Форму эллипса характеризует число $\varepsilon = \frac{b}{a}$, называемое эксцентриситетом. Для эллипса $0 \leq \varepsilon < 1$.

Упражнения

1. Найдите геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух точек $F_1(-4; 0)$ и $F_2(4; 0)$ равна 10.
2. Составьте каноническое уравнение эллипса, если:
а) $a=10, b=6$; б) $a+b=9, c=3$; в) $a=6, c=4$.
3. Найдите длины полуосей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса:
а) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$; б) $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$; в) $4x^2 + 9y^2 = 36$;
г) $4x^2 + 144y^2 = 576$; д) $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$; е) $9x^2 + 25y^2 - 1 = 0$.
4. Постройте эллипс: а) $x^2 + 4y^2 = 16$; б) $25x^2 + y^2 = 1$.
5. Найдите точки, принадлежащие эллипсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, абсциссы которых равны: а) 2; б) 3; в) -1.
6. На эллипсе $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ дана точка (3; 1). Найдите точки симметричные с данной относительно начала координат и координатных осей и убедитесь, что эти точки принадлежат эллипсу.
7. Напишите каноническое уравнение эллипса, если:
а) вершины эллипса имеют координаты: $A_1(-6; 0)$ и $A_2(6; 0)$, $B_1(0; -3)$ и $B_2(0; 3)$;
б) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b=3$;
в) большая полуось $a=6$, а эксцентриситет $e=0,5$.
8. Найдите точки пересечения прямой $x+2y-7=0$ и эллипса $x^2+4y^2=25$.
9. Эллипс симметричен относительно осей координат, проходит через точки $M(2; \sqrt{3})$ и $B(0; 2)$. Найдите его уравнение и расстояния от точки M до фокусов.

3.2.3. Гипербола

Определение. Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний которых до двух фиксированных точек $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, называемых фокусами, есть величина постоянная и равная $2a$.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $(x; y)$ – координаты текущей точки, a – действительная полуось, b – мнимая полуось гиперболы, $c^2 = a^2 + b^2$.

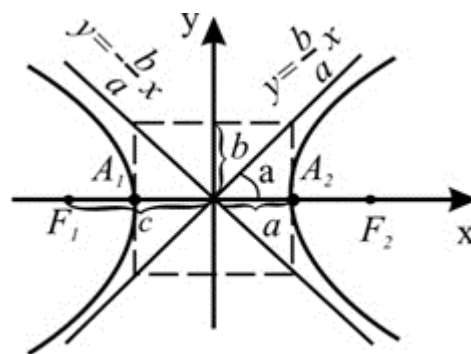
Гипербола имеет две оси симметрии (координатные оси), с одной из которых она пересекается в двух точках, называемых *вершинами*. Вершины гиперболы и её фокусы расположены на действительной оси гиперболы.

Так, для гиперболы, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

отрезок A_1A_2 длиной $2a$ и расположенный на оси OX является действительной осью,

- точки $A_1(-a; 0)$ и $A_2(a; 0)$ – вершинами,
- точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ – фокусами.



Для гиперболы, заданной уравнением

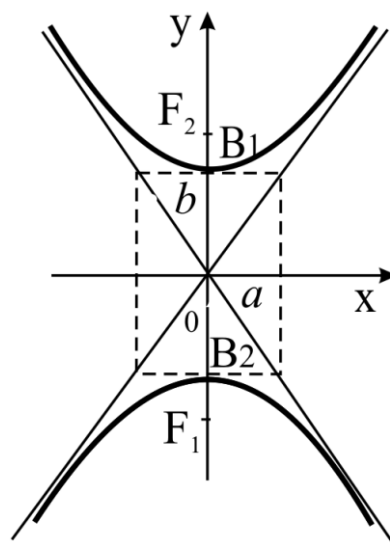
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- действительной осью является отрезок B_1B_2 длиной $2b$ оси OY ,
- вершинами – точки $B_1(0; -b)$ и $B_2(0; b)$,
- фокусами – точки $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых: $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$.

Форму гиперболы характеризует число $\varepsilon = \frac{c}{a}$, называемое эксцентриситетом гиперболы.

Для гиперболы $\varepsilon > 1$.



Например, построим гиперболу $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

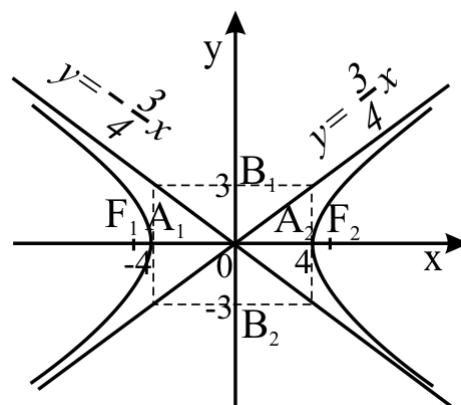
Перенесём свободный член вправо и разделим на него обе части уравнения. В результате получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1, \text{ или } \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Тогда $a=4$ – действительная полуось, $b=3$ – мнимая полуось. Координаты вершин $A_1(-4; 0)$ и $A_2(4; 0)$. Для построения гиперболы построим прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами $2a=8$ и $2b=6$, проведём его диагонали и продолжим их.

Эти прямые и есть асимптоты гиперболы и их уравнения: $y = \frac{3}{4}x$ и $y = -\frac{3}{4}x$.

Так как $c^2 = 16 + 9 = 25$, $c=5$, то фокусы имеют координаты $F_1(-5; 0)$ и $F_2(5; 0)$.



Упражнения

1. Напишите уравнение геометрического места точек, для каждой из которых модуль разности расстояний от точек $F_1(-4; 0)$ и $F_2(4; 0)$ равен 6.

2. Определите длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис для каждой из следующих гипербол:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1; & \text{б) } \frac{x^2}{16} - y^2 = 1; & \text{в) } x^2 - 4y^2 = 16; \\ \text{г) } x^2 - y^2 = 1; & \text{д) } 4x^2 - 9y^2 = 25; & \text{е) } 25x^2 - 16y^2 = 1; \\ \text{ж) } 9x^2 - 64y^2 = 1. \end{array}$$

3. Постройте гиперболы: а) $x^2 - 4y^2 = 4$; б) $16x^2 - 9y^2 = 144$.

4. Составьте каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Ох симметрично относительно начала координат, если:

а) ее полуоси $a=5$, $b=4$;

б) расстояние между фокусами $2c=10$ и ось $2b=8$;

в) расстояние между фокусами $2c=10$ и эксцентриситет $\varepsilon=1,5$;

г) ось $2a=16$ и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{4}$;

д) уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c=20$;

е) $M_1(6;-1)$ и $M_2(-8; 2\sqrt{2})$ – точки гиперболы.

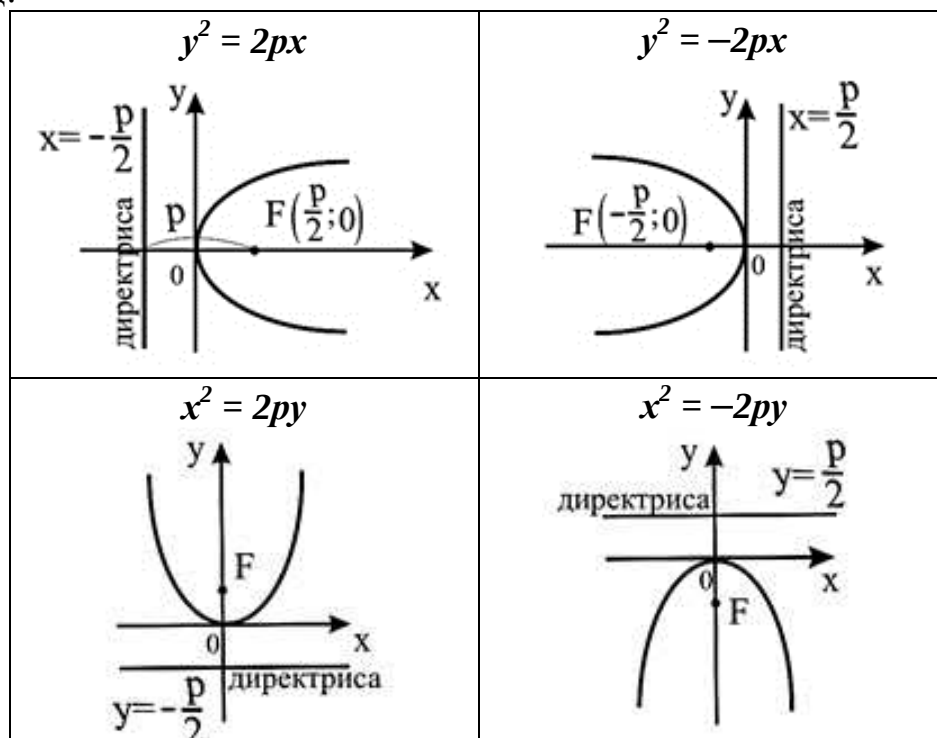
5. Найдите площадь прямоугольника, вершины которого лежат на гиперболе $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{10} = 1$, а две стороны его проходят через ее фокусы параллельно оси Оу.

3.2.4. Парабола

Определение Параболой называется множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Величина p , равная расстоянию от фокуса до директрисы, называется *параметром* параболы; прямая, проходящая через фокус параболы перпендикулярно её директрисе, называется *осью*.

Канонические уравнения параболы и соответствующие им графики имеют вид:



Вершины таких парабол расположены в начале координат, т.е. в точке $O(0,0)$.

Уравнение $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) определяет параболу, ось которой параллельна оси OY , а вершина находится в точке $O_1(x_0; y_0)$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$.

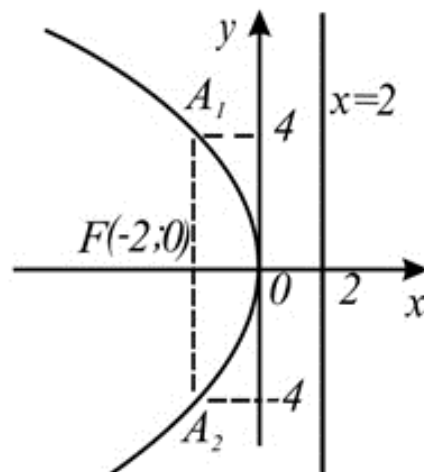
Например, определить вид и построить кривую:

а) $24x + 3y^2 = 0$;

б) $x^2 - 2x + y - 3 = 0$.

а) Так как в данном уравнении одна переменная (x) входит в первой степени, а другая (y), во второй, то оно определяет параболу. Приведём уравнение кривой к каноническому виду: $3y^2 = -24x$, или $y^2 = -8x$. Получим, что $2p = 8$, откуда $\frac{p}{2} = 2$.

Таким образом, точка $F(-2; 0)$ – фокус параболы, а прямая $x=2$ – её директриса. Для того, чтобы узнать размах ветвей, найдём пару точек, принадлежащих параболе: полагая $x=-2$ и подставляя это значение в каноническое уравнение параболы, имеем $y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow A_1(-2; 4)$ и $A_2(-2; -4)$.



б) Ось симметрии данной параболы параллельна оси Oy .

Так как $a=-1 < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

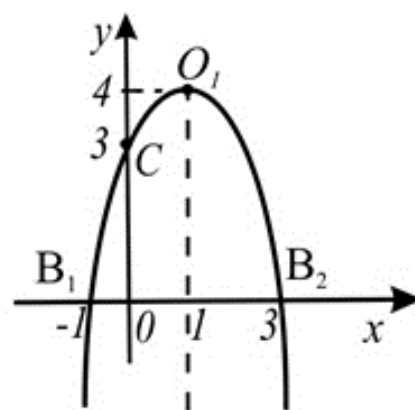
Найдём координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, x_0 = -\frac{2}{-2} = 1, y_0 = y(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 4 \\ \Rightarrow O_1(1; 4) - \text{вершина.}$$

Точки пересечения параболы с осями координат: полагая $y=0$, имеем $-x^2 + 2x + 3 = 0$, решая это уравнение, получим $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Следовательно, $B_1(-1; 0)$ и $B_2(3; 0)$; если $x=0$, то $y=3 \Rightarrow C(0; 3)$.

Отмечая на чертеже все найденные точки и, соединяя их плавной кривой, построим искомую параболу.



Упражнения

1. Определите координаты фокуса и составьте уравнение директрисы для параболы: а) $y^2=12x$; б) $y^2=-16x$; в) $x^2=3y$; г) $x^2=-2y$; д) $2x^2-3y=0$; е) $3y^2+16x=0$.

2. Постройте параболы и найдите их параметры:

а) $y^2=6x$; б) $x^2=5y$; в) $y^2=-4x$; г) $x^2=-y$.

3. Составьте уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, если:

а) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку $C(-1; 3)$;

б) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $C(4; -8)$.

4. Составьте каноническое уравнение параболы, если ее фокус имеет координаты:

а) $(-7; 0)$; б) $(0; 5)$; в) $(3; 0)$; г) $(0; -4)$.

5. Составьте каноническое уравнение параболы, если уравнение директрисы:

а) $x+15=0$; б) $x-7=0$; в) $y+12=0$; г) $6-y=0$.

6. Найдите высоту арки моста длиной 24 м, имеющей форму параболы, уравнение которой $x^2=-48y$.

7. Найдите уравнение касательной к параболе $y^2=4x$, проведенной из точки $M(-2; 1)$.

**Контрольная работа по теме
«Прямая на плоскости и кривые второго порядка»**

№1. Даны вершины треугольника ABC. Составьте уравнение высоты ВН этого треугольника и уравнение прямой BM параллельной стороне AC, если:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $A(1; 3), B(-2; 0), C(7; 4)$ | 6. $A(2; 3), B(-5; 0), C(6; 1)$ |
| 2. $A(-1; -3), B(2; 0), C(-7; -4)$ | 7. $A(-2; -3), B(5; 0), C(-6; -1)$ |
| 3. $A(-1; 3), B(0; 2), C(7; -4)$ | 8. $A(-2; 3), B(0; -5), C(6; -1)$ |
| 4. $A(1; -3), B(0; -2), C(-7; 4)$ | 9. $A(2; -3), B(0; 5), C(-6; 1)$ |
| 5. $A(1; 3), B(2; 2), C(-7; 4)$ | 10. $A(2; 3), B(5; 5), C(6; -1)$ |

№ 2. Определите координаты центра и радиус окружности:

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| 1. $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ | 6. $x^2+y^2+2x-6y-6=0$ |
| 2. $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ | 7. $x^2+y^2+6x-2y+1=0$ |
| 3. $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ | 8. $x^2+y^2-6x+2y-15=0$ |
| 4. $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ | 9. $x^2+y^2-10x+4y+4=0$ |
| 5. $x^2+y^2-2x+6y+9=0$ | 10. $x^2+y^2+10x-4y-7=0$ |

№3. Составьте каноническое уравнение эллипса, если расстояния от его фокуса до концов большой оси равны:

- | | |
|-----------|------------|
| 1. 2 и 14 | 6. 12 и 8 |
| 2. 15 и 1 | 7. 5 и 11 |
| 3. 3 и 11 | 8. 13 и 5 |
| 4. 13 и 7 | 9. 6 и 14 |
| 5. 4 и 12 | 10. 14 и 4 |

№4. Найдите длины полуосей, координаты фокусов и уравнения асимптот гиперболы:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. $2x^2-9y^2=18$ | 6. $2x^2-25y^2=50$ |
| 2. $3x^2-4y^2=12$ | 7. $3x^2-16y^2=48$ |
| 3. $5x^2-16y^2=80$ | 8. $4x^2-25y^2=100$ |
| 4. $6x^2-25y^2=150$ | 9. $5x^2-9y^2=45$ |
| 5. $7x^2-9y^2=63$ | 10. $6x^2-9y^2=54$ |

№5. Постройте параболу и запишите уравнение ее директрисы:

- | | |
|--------------|--------------|
| 1. $y^2=3x$ | 6. $x^2=2y$ |
| 2. $y^2=-3x$ | 7. $x^2=-4y$ |
| 3. $x^2=-3y$ | 8. $x^2=4y$ |
| 4. $y^2=2x$ | 9. $y^2=4x$ |
| 5. $y^2=-2x$ | 10. $x^2=y$ |

ЛИТЕРАТУРА

1. Башмаков М.И. Математика: Сборник задач профессиональной направленности: Учебное пособие для учреждений начального и среднего профессионального образования. – М.: Академия, 2013.
2. Башмаков М.И. Математика: Учебник для студентов среднего профессионального образования. – М.: Академия, 2014.
3. Грешлов А.А., Белова Т.И. Аналитическая геометрия. Векторная алгебра. Кривые второго порядка. Компьютерный курс: Учеб. пособие. – М.: Логос, 2004.
4. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. Сборник задач по высшей математике. – М.: Айрис-Пресс, 2008.
5. Покровский В.Г. Элементы высшей математики. – М.: Академия, 2014.
6. Соболев Б.В. Практикум по высшей математике. – Ростов н/Д: Феникс, 2006.

Светлана Ивановна Сафронова

Математика
(элементы линейной алгебры и аналитической геометрии)

Практикум по математике
для студентов специальности 09.02.05 Прикладная информатика (по отраслям)
и преподавателей профессиональных образовательных учреждений

Подписано в печать 12.01.16 г. Формат 60х80/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Объем 3,3 п.л.
Тираж 100 экз. Заказ № 4192
Изготовлено в «Копицентр»
г. Ростов-на-Дону, ул. Суворова, 19.